



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ  
ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ  
Π/ΘΜΙΑΣ ΚΑΙ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ  
ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ  
ΤΜΗΜΑ Α΄

Ταχ. Δ/ση: Ανδρέα Παπανδρέου 37  
Τ.Κ. – Πόλη: 15180 Μαρούσι  
Ιστοσελίδα: [www.minedu.gov.gr](http://www.minedu.gov.gr)  
Πληροφορίες: Αν. Πασχαλίδου  
Β. Πελώνη  
Τηλέφωνο: 210-3443422  
210-3442238

ΠΡΟΣ :

- Περιφερειακές Δ/νσεις Εκπ/σης
- Σχολ. Συμβούλους Δ.Ε. (μέσω των Περιφερειακών Δ/νσεων Εκπ/σης)
- Δ/νσεις Δ.Ε.
- Γενικά Λύκεια (μέσω των Δ/νσεων Δ.Ε.)

ΚΟΙΝ.:

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής  
Πολιτικής (Ι.Ε.Π.)  
[info@iep.edu.gr](mailto:info@iep.edu.gr)

**ΘΕΜΑ: Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ τάξεις Ημερήσιου ΓΕ.Λ και Α΄, Β΄, Γ΄ τάξεις Εσπερινού ΓΕΛ για το σχολ. έτος 2017 – 2018**

Σχετ.: Το με αρ. πρωτ. εισ. ΥΠ.Π.Ε.Θ. 156911/20-09-2017 έγγραφο

Μετά από σχετική εισήγηση του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (πράξη 36/14-09-2017 του Δ.Σ) σας αποστέλλουμε τις παρακάτω οδηγίες για τη διδασκαλία των **Μαθηματικών** για το σχολικό έτος 2017-2018:

1. Άλγεβρα (Τάξεις: Α΄, Β΄ Ημερησίου ΓΕΛ, Α΄, Β΄, Γ΄ Εσπερινού ΓΕΛ)
2. Γεωμετρία (Τάξεις: Α΄, Β΄ Ημερησίου ΓΕΛ, Α΄, Β΄, Γ΄ Εσπερινού ΓΕΛ)
3. Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών (Τάξεις: Β΄ Ημερησίου ΓΕΛ και Γ΄ Εσπερινού ΓΕΛ)

### Άλγεβρα Α΄ Τάξης Ημερήσιου Γενικού Λυκείου

#### **ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ-ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ**

##### **I. Εισαγωγή**

Το μάθημα «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων» περιέχει σημαντικές μαθηματικές έννοιες, όπως, της απόλυτης τιμής, των προόδων, της συνάρτησης κ.ά., οι οποίες είναι απαραίτητες για την μετέπειτα μαθηματική εξέλιξη των μαθητών. Οι μαθητές έχουν έρθει σε μια πρώτη επαφή με αυτές τις έννοιες σε προηγούμενες τάξεις. Στην Α΄ Λυκείου θα τις αντιμετωπίσουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, το οποίο δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες στους μαθητές. Για την αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών προτείνεται να αφιερωθεί ικανός χρόνος στην εμπέδωση των νέων εννοιών, μέσω της ανάπτυξης και σύνδεσης πολλαπλών αναπαραστάσεών τους και στη χρήση τους στην

επίλυση προβλημάτων. Επίσης, να αφιερωθεί χρόνος ώστε οι μαθητές να εμπλακούν στην αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ ιδιοτήτων και διαδικασιών καθώς και σε διαδικασίες γενίκευσης. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και η σύνδεσή τους μπορούν υποστηριχθούν από ψηφιακά περιβάλλοντα, με τη βοήθεια των οποίων οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν σε ουσιαστικές μαθηματικές δραστηριότητες. Μέσα από τη διερεύνηση ομοιοτήτων και διαφορών - για παράδειγμα η συσχέτιση των διαδικασιών επίλυσης ή της μορφής των λύσεων εξισώσεων και ανισώσεων, η συσχέτιση ορισμένων ιδιοτήτων των ριζών και των αποδείξεών τους με αντίστοιχες των απολύτων τιμών - οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις σχετικές έννοιες και διαδικασίες.

## II. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου»

### Εισαγωγικό κεφάλαιο

E.2 Σύνολα

### Κεφ.2<sup>ο</sup>: Οι Πραγματικοί Αριθμοί

- 2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητές τους
- 2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών (εκτός της απόδειξης της ιδιότητας 4)
- 2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού
- 2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών (εκτός των ιδιοτήτων 3 και 4)

### Κεφ.3<sup>ο</sup>: Εξισώσεις

- 3.1 Εξισώσεις 1<sup>ου</sup> Βαθμού
- 3.2 Η Εξίσωση  $x^y = a$
- 3.3 Εξισώσεις 2<sup>ου</sup> Βαθμού

### Κεφ.4<sup>ο</sup>: Ανισώσεις

- 4.1 Ανισώσεις 1<sup>ου</sup> Βαθμού
- 4.2 Ανισώσεις 2<sup>ου</sup> Βαθμού

### Κεφ.5<sup>ο</sup>: Πρόοδοι

- 5.1 Ακολουθίες
- 5.2 Αριθμητική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το άθροισμα  $n$  διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου )
- 5.3 Γεωμετρική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το άθροισμα  $n$  διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου )

### Κεφ.6<sup>ο</sup>: Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

- 6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης
- 6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης
- 6.3 Η Συνάρτηση  $f(x) = ax + b$  (εκτός της κλίσης ευθείας ως λόγος μεταβολής)

### Κεφ.7<sup>ο</sup>: Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων

- 7.1 Μελέτη της Συνάρτησης:  $f(x) = ax^2$
- 7.3 Μελέτη της Συνάρτησης:  $f(x) = ax^2 + bx + c$

## III. Διαχείριση διδακτέας ύλης

[Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι δραστηριότητες που αναφέρονται ως Δ1, Δ2 κλπ περιέχονται στο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών

της Α Λυκείου που ισχύει (ΥΑ 59614/Γ2, ΦΕΚ 1168/8-6-2011) Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ: <http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php> ]

### Εισαγωγικό Κεφάλαιο

(Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια του συνόλου καθώς και σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων. Ειδικότερα:

Όσον αφορά στην §Ε.1, αυτή να μη διδαχθεί ως αυτόνομο κεφάλαιο αλλά να συζητηθεί το νόημα και η χρήση των στοιχείων της Λογικής στις ιδιότητες και προτάσεις που διατρέχουν τη διδακτέα ύλη (για παράδειγμα στην ιδιότητα  $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$  της §2.1 μπορεί να διερευνηθεί το νόημα της ισοδυναμίας και του συνδέσμου «και»).

### §Ε.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά με συστηματικό τρόπο την έννοια του συνόλου και των σχέσεων και πράξεων μεταξύ συνόλων. Επειδή η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική, δηλαδή δεν ορίζεται, χρειάζεται να τονισθούν οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να θεωρηθεί μια συλλογή αντικειμένων σύνολο μέσα από κατάλληλα παραδείγματα (π.χ. το σύνολο που αποτελείται από τα θρανία και τους μαθητές της τάξης, το «σύνολο» των ψηλών μαθητών της τάξης).

Η αναπαράσταση συνόλων, σχέσεων και πράξεων αυτών καθώς και η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση της έννοιας του συνόλου.

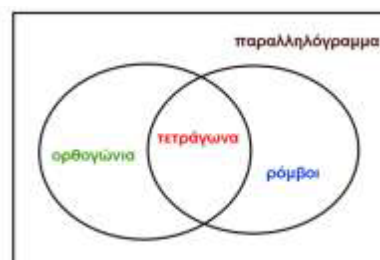
Οι πράξεις μεταξύ συνόλων είναι ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές μπορούν να δώσουν νόημα στους συνδέσμους «ή» και «και». Ειδικά, όσον αφορά στο σύνδεσμο «ή», να επισημανθεί η διαφορετική του σημασία στα Μαθηματικά από εκείνη της αποκλειστικής διάζευξης που του αποδίδεται συνήθως στην καθημερινή χρήση του. Οι δραστηριότητες Δ.1, Δ.2 και Δ.3 του ΑΠΣ είναι ενδεικτικές για την εννοιολογική προσέγγιση της έννοιας του συνόλου.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Χρησιμοποιείτε τα διαγράμματα Venn για να αναπαραστήσετε τις σχέσεις μεταξύ παραλληλογράμμων, ορθογώνιων, τετραγώνων και ρόμβων.

[Σχόλιο: Από το διάγραμμα μπορούν οι μαθητές να διαπιστώσουν ακόμα ότι:

- Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια, ενώ όλα τα ορθογώνια δεν είναι τετράγωνα.
- Όλα τα τετράγωνα είναι ρόμβοι, αλλά όλοι οι ρόμβοι δεν είναι τετράγωνα.
- Όλοι οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα, αλλά όλα τα παραλληλόγραμμα δεν είναι ρόμβοι ...



### Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>

(Προτείνεται να διατεθούν 19 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του. Η επανάληψη και

περαιτέρω εξάσκηση των μαθητών στον αλγεβρικό λογισμό (αλγεβρικές πράξεις, παραγοντοποίηση, ταυτότητες κ.λ.π.) δεν αποτελεί τον κύριο στόχο αυτού του κεφαλαίου. Ειδικότερα:

### §2.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους και γενικότερα στην ταξινόμηση των πραγματικών αριθμών σε φυσικούς, ακέραιους ρητούς και άρρητους. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών επηρεάζουν τις παραπάνω διεργασίες. Για το λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους με χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων, όπως οι αριθμοί  $\frac{4}{3}$ , 1.333..., 1,010101..., 1,1010010001..., καθώς και

στην ταξινόμηση αριθμών στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (όπως  $\frac{4}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ,  $\frac{\pi}{6}$ ,

1.333 κ.ά.). Παράλληλα, και με αφορμή τα παραπάνω παραδείγματα, μπορεί να γίνει συζήτηση αν το άθροισμα και το γινόμενο δύο ρητών ή δύο άρρητων ή ρητού και άρρητου είναι ρητός ή άρρητος.

Σημαντικό για τον αλγεβρικό λογισμό είναι οι μαθητές να κατανοήσουν τις ιδιότητες των πράξεων. Σε αυτό θα βοηθήσει η λεκτική διατύπωση και η διερεύνηση των ιδιοτήτων καθώς και η αναγνώριση της σημασίας της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των συνδέσμων «ή» και «και», με ιδιαίτερη έμφαση στις ιδιότητες:  $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$  ή  $\beta = 0$ ,  $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$ .

Να δοθεί έμφαση στις μεθόδους απόδειξης και ιδιαίτερα σε αυτές με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές, όπως η χρήση της απαγωγής σε άτοπο για την απόδειξη ότι ο  $\sqrt{2}$  είναι άρρητος και του αντιπαραδείγματος στην απόρριψη του ισχυρισμού:  $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$ . Η δραστηριότητα Δ9 του ΑΠΣ μπορεί να αξιοποιηθεί προς αυτή την κατεύθυνση.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Η Ελένη και ο Κώστας παρατηρούν ότι το άθροισμα  $3+11$  είναι άρτιος και το γινόμενο  $3 \times 11$  είναι περιττός. Κατόπιν αυτών:

Η Ελένη ισχυρίζεται ότι: αν το άθροισμα δύο φυσικών αριθμών είναι άρτιος, τότε το γινόμενό τους είναι περιττός

Ο Κώστας ισχυρίζεται ότι: αν το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών είναι περιττός, τότε το άθροισμά τους είναι άρτιος.

Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

α) οι ισχυρισμοί της Ελένης και του Κώστα λένε το ίδιο πράγμα;

β) Το γινόμενο δύο φυσικών είναι 1271. Αν υποθέσουμε ότι έχει δίκιο ο Κώστας ποια από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστή;

i. το άθροισμα των δύο αριθμών είναι σίγουρα άρτιος

ii. το άθροισμα των δύο αριθμών είναι σίγουρα περιττός

iii. δεν είναι σίγουρο αν το άθροισμα είναι περιττός ή άρτιος μέχρι να μάθουμε ποιοι είναι οι αριθμοί.

γ) είναι σωστός ο ισχυρισμός της Ελένης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) είναι σωστός ο ισχυρισμός του Κώστα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

### §2.2 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι μαθητές, επηρεασμένοι από τη διαδοχικότητα των ακεραίων, συναντούν δυσκολίες στην

κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της έννοιας της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.9 του ΑΠΣ) καθώς και στις ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας, με έμφαση στις ισοδυναμίες:  $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$ , ενώ  $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$  και στα σχόλια 1 και 2 της σελ. 56 .

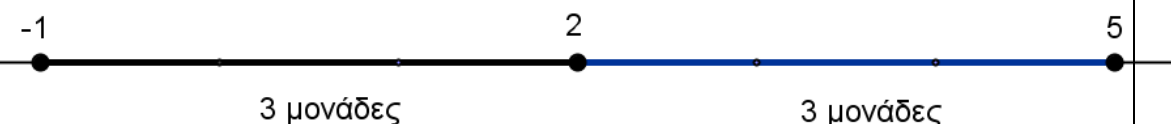
### §2.3 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόσταση του από το μηδέν στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Στην ενότητα αυτή δίνεται ο τυπικός ορισμός της απόλυτης τιμής και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές της. Να επισημανθεί η μέθοδος απόδειξης των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών (ότι η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με μία σχέση που γνωρίζουμε ότι είναι αληθής) και να συζητηθεί η αναγκαιότητα του «πρέπει» (☐) και του «αρκεί» (☐) σε αυτές.

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός αριθμού και της απόλυτης τιμής της διαφοράς δύο αριθμών είναι σημαντική, γιατί βοηθά τους μαθητές να αποδώσουν νόημα στην έννοια. Η σύνδεση, όμως, της αλγεβρικής σχέσης και της γεωμετρικής της αναπαράστασης δεν είναι κάτι που γίνεται εύκολα από τους μαθητές και για αυτό απαιτείται να δοθεί σε αυτό ιδιαίτερη έμφαση.

Με αυτή την έννοια προτείνεται να μη διδαχθούν, στη γενική τους μορφή, οι:

$|x - x_0| < r \Leftrightarrow x \in (x_0 - r, x_0 + r) \Leftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r$  καθώς και  $|x - x_0| > r \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - r \text{ ή } x > x_0 + r$  καθώς και η γεωμετρική ερμηνεία αυτών, επειδή είναι πολύ δύσκολο να γίνουν κατανοητά από τους μαθητές σ' αυτή τη φάση της αλγεβρικής τους εμπειρίας. Ομοίως να μη διδαχθεί η έννοια του κέντρου και της ακτίνας διαστήματος. Αντίθετα, οι μαθητές μπορούν να ασχοληθούν με τα παραπάνω μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα (π.χ. η ανίσωση  $|x - 2| < 3$  σημαίνει: «ποιοι είναι οι αριθμοί που απέχουν από το 2 απόσταση μικρότερη του 3;» δηλ.  $|x - 2| < 3 \Leftrightarrow (x, 2) < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$ ).



Προτείνεται, όμως, να γίνει διαπραγμάτευση των σχέσεων  $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$  και  $|x| > r \Leftrightarrow x < -r \text{ ή } x > r$ . Η δραστηριότητα Δ.10 του ΑΠΣ υποστηρίζει την παραπάνω προσέγγιση.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Δίνονται τα σημεία A , B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με  $-2 < x < 7$ .

- α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων: i.  $|x + 2|$  ii.  $|x - 7|$
- β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:  $|x + 2| + |x - 7|$
- γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = |x + 2| + |x - 7|$  γεωμετρικά.
- δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

### §2.4 Προτείνεται να διατεθούν 3 ώρες

Οι μαθητές έχουν ήδη αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, τις τετραγωνικές ρίζες και δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη καθώς και τις ιδιότητες αυτών. Στην ενότητα αυτή γίνεται επέκταση στη ν-οστή ρίζα και στη

δύναμη με ρητό εκθέτη. Να μη διδαχθούν οι ιδιότητες 3 και 4 ( δηλαδή οι  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$  και  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$  ) εφόσον καλύπτονται πλήρως από τη χρήση των δυνάμεων με ρητό εκθέτη και μάλιστα με μικρότερες δυσκολίες χειρισμών.

Να επισημανθεί η διατήρηση των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη και στην περίπτωση του ρητού εκθέτη. Προτείνεται η διαπραγμάτευση απλών ασκήσεων. Για να αναδειχθούν τα πλεονεκτήματα των αλγεβρικών μεθόδων έναντι της χρήσης του υπολογιστή τσέπης, προτείνεται μια δραστηριότητα σαν τη Δ.11 του ΑΠΣ.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Στο ερώτημα ποιον αριθμό εκφράζει η παράσταση  $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2$  δόθηκαν δυο διαφορετικές απαντήσεις. Να εξετάσετε που βρίσκεται το πρόβλημα.

$$1^{\text{η}} \text{ απάντηση: } \left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = \left[(-2)^{2 \cdot \frac{1}{4}}\right]^2 = \left[\left[(-2)^2\right]^{\frac{1}{4}}\right]^2 = \left(4^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$2^{\text{η}} \text{ απάντηση: } \left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = (-2)^{\frac{2}{4} \cdot 2} = (-2)^1 = -2$$

### **Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν συστηματικά και διερευνούν εξισώσεις 1<sup>ου</sup> και 2<sup>ου</sup> βαθμού. Ως ιδιαίτερη περίπτωση εξετάζεται η εξίσωση  $x^y = a$ . Ειδικότερα:

#### **§3.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες**

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση εξισώσεων της μορφής  $ax+b=0$ , της οποίας οι συντελεστές  $a$  και  $b$  είναι συγκεκριμένοι αριθμοί. Συναντούν δυσκολίες στη μετάβαση από την επίλυση μιας τέτοιας μορφής εξίσωσης στην επίλυση της γενικής μορφής  $ax+b=0$ , για δυο κυρίως λόγους: α) είναι δύσκολος ο διαχωρισμός της έννοιας της παραμέτρου από την έννοια της μεταβλητής και β) δεν είναι εξοικειωμένοι με τη διαδικασία της διερεύνησης γενικά.

Για το λόγο αυτό, προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση του ρόλου της παραμέτρου σε μια παραμετρική εξίσωση 1<sup>ου</sup> βαθμού μέσα από τη διαπραγμάτευση της παραμετρικής εξίσωσης που περιλαμβάνεται στη θεωρία αυτής της παραγράφου (σχολικό βιβλίο, σελ. 80). Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να λύσουν την εξίσωση για συγκεκριμένες τιμές του  $\lambda$  ( π.χ.  $\lambda=2$ ,  $\lambda=5$ ,  $\lambda=1$ ,  $\lambda=-1$ ) και στη συνέχεια να προσπαθήσουν να διατυπώσουν γενικά συμπεράσματα για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ . Προτείνεται, επίσης, προς διαπραγμάτευση η δραστηριότητα Δ.12 του ΑΠΣ καθώς και η επίλυση απλών παραμετρικών εξισώσεων και απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 1<sup>ου</sup> βαθμού (όπως η άσκηση 10 της Α' Ομάδας).

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση σε εξισώσεις, όπως η  $|x-5|=-3$ , την οποία δύσκολα χαρακτηρίζουν οι μαθητές από την αρχή ως αδύνατη.

#### **§3.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες**

Η επίλυση εξισώσεων της μορφής  $x^y = a$  να περιοριστεί σε απλές εξισώσεις.

#### **§3.3 Προτείνεται να διατεθούν 7 ώρες**

Η επίλυση της εξίσωσης  $ax^2+bx+c=0$ ,  $a \neq 0$  στη γενική της μορφή με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» είναι μια διαδικασία που δυσκολεύει τους μαθητές. Προτείνεται να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές τη μέθοδο της «συμπλήρωσης τετραγώνου» πρώτα σε εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού με συντελεστές συγκεκριμένους αριθμούς και στη συνέχεια με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού να γενικεύσουν τη διαδικασία.

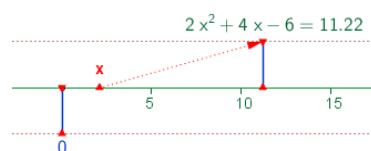
Επίσης, προτείνεται η επίλυση απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού (όπως τα παραδείγματα 1 και 3) και να δοθεί έμφαση στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων 2<sup>ου</sup> βαθμού (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.13 και Δ.14 του ΑΠΣ).

Οι τύποι του Vieta επιτρέπουν στους μαθητές είτε να κατασκευάσουν μια εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού με δεδομένο το άθροισμα και το γινόμενο ριζών της είτε να προσδιορίσουν απευθείας τις ρίζες της (βρίσκοντας δυο αριθμούς που να έχουν άθροισμα S και γινόμενο P). Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές, υπό μορφή άσκησης, να προσδιορίσουν αυτούς τους τύπους και να τους χρησιμοποιήσουν στην επίλυση σχετικών προβλημάτων. Πέραν των παραπάνω στόχων, η χρήση των τύπων του Vieta σε ασκήσεις με πολύπλοκους αλγεβρικούς χειρισμούς ξεφεύγει από το πνεύμα της διδασκαλίας και δεν προσφέρει στη μαθηματική σκέψη των μαθητών.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος  $y$  (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή  $t$  (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση:  $y = 60t - 5t^2$ .

- α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;
- β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος  $y = 175$  m;
- γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.



#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Επίλυση εξισώσεων 2<sup>ου</sup> βαθμού με τη βοήθεια τύπου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση της αλγεβρικής και γραφικής προσέγγισης των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια του τύπου.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2132>

### **Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν συστηματικά και διερευνούν ανισώσεις 1<sup>ου</sup> και 2<sup>ου</sup> βαθμού  
Ειδικότερα:

#### **§4.1 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες**

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση ανισώσεων 1<sup>ου</sup> βαθμού με συγκεκριμένους συντελεστές. Εκτός από τη χρήση της αριθμογραμμής, για την απεικόνιση του συνόλου λύσεων μιας ανίσωσης, προτείνεται να δοθεί έμφαση και στη χρήση των διαστημάτων των πραγματικών αριθμών για την παραπάνω απεικόνιση, ως εφαρμογή της αντίστοιχης

υποπαραγράφου της §2.2. Να συζητηθούν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στην εξίσωση και την ανίσωση, ως προς τη διαδικασία της επίλυσης τους και το σύνολο των λύσεών τους.

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να λυθούν από τους μαθητές και ανισώσεις όπως οι  $|x-5|<-3$  ή  $|x-5|>-3$ , των οποίων τη λύση, αν και προκύπτει από απλή παρατήρηση, δεν την αναγνωρίζουν άμεσα οι μαθητές. Προτείνεται επίσης να δοθεί προτεραιότητα στη μοντελοποίηση προβλημάτων με χρήση ανισώσεων 1<sup>ου</sup> βαθμού, όπως για παράδειγμα η άσκηση 11 της Α' Ομάδας και οι ασκήσεις 3 και 4 της Β' Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Η Ειρήνη παρατηρεί ότι κάθε φορά που ο σκύλος της γαβγίζει τη νύχτα ξυπνάει και χάνει 15 λεπτά ύπνου. Το προηγούμενο βράδυ κοιμήθηκε λιγότερο από 5 ώρες, ενώ συνήθως (αν δεν γαβγίσει ο σκύλος) κοιμάται 8 ώρες το βράδυ.

α) Πόσες φορές μπορεί να ξύπνησε το προηγούμενο βράδυ η Ειρήνη;

β) Μπορεί να την ξύπνησε το γάβγισμα 33 φορές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**§4.2 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες**

Η διαπραγμάτευση ανισώσεων 2<sup>ου</sup> βαθμού γίνεται για πρώτη φορά στην Α' Λυκείου. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της παραγοντοποίησης του τριωνύμου, όπου γίνεται ξανά χρήση της μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνου», ώστε να μη δοθούν απευθείας τα συμπεράσματα αυτής. Στον προσδιορισμό του πρόσημου του τριωνύμου, παρατηρείται συχνά οι μαθητές να παραβλέπουν το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου ή να συγχέουν το πρόσημο της διακρίνουσας με το πρόσημο του τριωνύμου (π.χ. όταν  $\Delta < 0$ , θεωρούν ότι και το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές). Τα παραπάνω προβλήματα συχνά αντιμετωπίζονται με διάφορα «τεχνάσματα» με τα σύμβολα «+» και «-», ώστε να προσδιορίσουν οι μαθητές το πρόσημο του τριωνύμου και να επιλύσουν ανισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού. Τέτοιες προσεγγίσεις δε συνδέονται με την κατανόηση του πότε ένα τριώνυμο παίρνει θετικές και πότε αρνητικές τιμές.

Για το λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στην κατανόηση της διαδικασίας προσδιορισμού του πρόσημου του τριωνύμου (π.χ. μέσα από τη μελέτη του προσήμου των παραγόντων του και του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, όταν αυτό παραγοντοποιείται) και στη συνέχεια στη χρήση των συμπερασμάτων για την επίλυση ανισώσεων 2<sup>ου</sup> βαθμού (π.χ. η δραστηριότητα Δ.15 του ΑΠΣ και η άσκηση 7 της Β' Ομάδας) λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Να λύσετε την ανίσωση:  $X^2 - 5X - 6 < 0$ .

β) Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών  $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$  και  $M = (\sqrt{37})^2 - 5\sqrt{37} - 6$ .

Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

γ) Αν  $\alpha \in (-6, 6)$ , να βρείτε το πρόσημο της παράστασης  $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

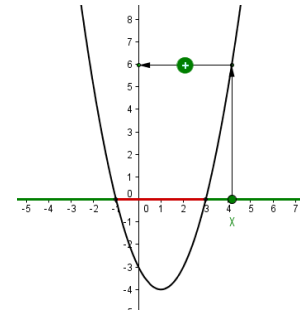
Ποιοι πραγματικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους; Ποιοι είναι



μεγαλύτεροι κατά 1 από το τετράγωνό τους;

### Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Το μικροπείραμα «Πρόσθημα των τιμών του τριωνύμου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, ώστε ο μαθητής να οδηγηθεί μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην εύρεση της περιοχής που πρέπει να κινείται η τιμή της μεταβλητής  $x$ , ώστε το τριώνυμο να παίρνει θετική ή αρνητική τιμή. Παράλληλα μαθαίνει για το ρόλο της εικασίας και του πειραματισμού στη διαδικασία της εύρεσης αλγεβρικών σχέσεων.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1752>

## **Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών και μελετούν περιπτώσεις ακολουθιών που εμφανίζουν κάποιες ειδικές μορφές κανονικότητας, την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο. Ειδικότερα:

### **§5.1 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες**

Να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση της ακολουθίας ως αντιστοιχίας των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και στην εξοικείωση των μαθητών με το συμβολισμό (π.χ. ότι ο φυσικός αριθμός 1, μέσω μιας ακολουθίας  $a$ , αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό  $a_1$  που αποτελεί τον πρώτο όρο της ακολουθίας αυτής), δεδομένου ότι αυτός δυσκολεύει τους μαθητές (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.16 του ΑΠΣ ).

### **§5.2 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες**

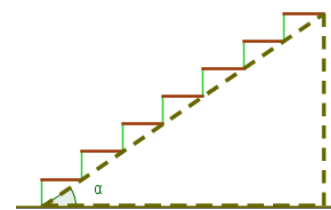
Αρχικά οι μαθητές χρειάζεται να μπορούν να αναγνωρίσουν με βάση τον ορισμό αν μια συγκεκριμένη ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος (π.χ. η δραστηριότητα Δ.17 του ΑΠΣ). Στη συνέχεια, να προσδιορίζουν το  $n$ -στό όρο με τρόπο τέτοιο που να τους βοηθά να αντιληφθούν κανονικότητες, οι οποίες μπορούν να τους οδηγήσουν στα γενικά συμπεράσματα (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.18 του ΑΠΣ χωρίς τα ερωτήματα  $\gamma$  και  $\delta$ ). Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων (όπως η άσκηση 12 της Α΄ Ομάδας) συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της αριθμητικής πρόοδου.

Η απόδειξη του τύπου για το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων αριθμητικής πρόοδου δεν θα διδαχθεί.

### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Ας φτιάξουμε μια σκάλα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά ώστε ο μαθητής να οδηγηθεί μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην κατανόηση των εννοιών της αριθμητικής πρόοδου.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5155>



### §5.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Η διαπραγμάτευση της έννοιας της γεωμετρικής προόδου προτείνεται να γίνει κατ' αντιστοιχία με την έννοια της αριθμητικής προόδου. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.19 (χωρίς τα ερωτήματα δ και ε) και Δ.21 (χωρίς το ερώτημα δ) του ΑΠΣ, που στόχο έχουν να αντιληφθούν οι μαθητές κανονικότητες που θα τους οδηγήσουν στην εύρεση του  $n$ -στού όρου γεωμετρικής προόδου. Η απόδειξη του τύπου για το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου δεν θα διδαχθεί

#### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Την ημέρα που η Μαρία γιόρταζε τα 12α γενέθλιά της, η γιαγιά της, της έδωσε 50 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21α γενέθλιά της θα της αύξανε κάθε χρόνο το ποσό του δώρου της κατά 10 ευρώ. Ο παππούς της Μαρίας της έδωσε 5 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21α γενέθλιά της θα της διπλασίαζε κάθε χρόνο, το προηγούμενο ποσό του δώρου του. Η Μαρία δυσσαρεστήθηκε με την πρόταση του παππού της. Είχε δίκιο; Πόσα χρήματα θα είναι το δώρο της, στα 15α και στα 21α γενέθλια της, από τον παππού της και πόσα από τη γιαγιά της;

### Κεφάλαιο 6°

(Προτείνεται να διατεθούν 11 διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν έρθει σε επαφή με την έννοια της συνάρτησης, κυρίως με εμπειρικό τρόπο, και έχουν διερευνήσει στοιχειωδώς συγκεκριμένες συναρτήσεις. Στην Α' Λυκείου μελετούν την έννοια της συνάρτησης με πιο συστηματικό και τυπικό τρόπο. Σε πολλούς μαθητές δημιουργούνται παρανοήσεις και ελλειπείς εικόνες σχετικά με την έννοια αυτή, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν προβλήματα στην αναγνώριση μιας συνάρτησης, καθώς και να μη μπορούν να χειριστούν με ευελιξία διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης (π.χ. πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση). Για το λόγο αυτό θα πρέπει οι μαθητές, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, να χρησιμοποιούν, να συνδέουν και να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης καθώς και να εντοπίζουν πλεονεκτήματα και (ενδεχομένως) μειονεκτήματα καθεμιάς εξ αυτών. Η εξαντλητική ενασχόληση των μαθητών με επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων για την εύρεση του πεδίου ορισμού δεν βοηθά στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και δεν είναι στο πνεύμα της διδασκαλίας.

Οι έννοιες «κατακόρυφη - οριζόντια μετατόπιση καμπύλης», «μονοτονία – ακρότατα - συμμετρίες συνάρτησης», δεν συμπεριλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη, όπως αναπτύσσονται στις παραγράφους 6.4 και 6.5. Οι έννοιες αυτές θα μελετηθούν στις ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων της μορφής:  $f(x)=ax+b$  (§6.3),  $f(x)=ax^2$  (§7.1) και  $f(x)=ax^2+bx+c$  (§7.3). Ειδικότερα:

### §6.1 - §6.2 Προτείνεται να διατεθούν 7 ώρες

Προτείνεται να δοθούν αρχικά συγκεκριμένα παραδείγματα μοντελοποίησης καταστάσεων, ώστε να αναδειχθεί η σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τις εφαρμογές, και στη συνέχεια να ακολουθήσει ο τυπικός ορισμός. Να δοθεί έμφαση στην αναγνώριση και τεκμηρίωση, με βάση τον ορισμό, αν αντιστοιχίες που δίνονται με διάφορες αναπαραστάσεις είναι συναρτήσεις ή όχι (οι δραστηριότητες Δ.22, Δ.23 και Δ.24 του ΑΠΣ λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση), στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση)

και στην ερμηνεία μιας δεδομένης γραφικής παράστασης για την επίλυση ενός προβλήματος). Ο τυπικός ορισμός της μονοτονίας θα συζητηθεί στην Β τάξη. Μπορεί όμως κατά την κρίση του διδάσκοντα να εισαχθούν διαισθητικά οι έννοιες της μονοτονίας και ακρότατων και να γίνει η αναγνώριση τους σε γραφικές παραστάσεις. Οι έννοιες αυτές δεν αποτελούν εξεταστέα ύλη.

Τονίζεται ότι ο τύπος της απόστασης δύο σημείων αποτελεί μία άλλη έκφραση του Πυθαγορείου Θεωρήματος με όρους συντεταγμένων, ανακαλεί τις έννοιες των παραγράφων 2.3 και 2.4 . και προσφέρεται για υπολογισμούς. Επισημαίνεται ότι:

A) Η απόδειξη του τύπου δεν αποτελεί αντικείμενο εξέτασης και ως εφαρμογές του θα διδαχθούν οι ασκήσεις 4 και 5 .

B) Δεν θα διδαχθεί η εφαρμογή της σελίδας 155

Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.15 και Δ.26 του ΑΠΣ

Ενδεικτική

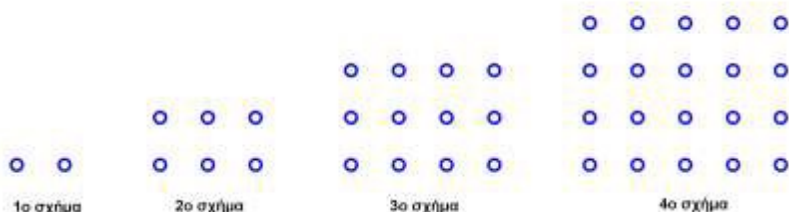
δραστηριότητα

1:

i) Ποιόν κανόνα

πρέπει να

εφαρμόσουμε



για να υπολογίσουμε από πόσα σημεία θα αποτελείται το 7ο σχήμα ;

ii) Από πόσα σημεία θα αποτελείται το 27ο σχήμα ;

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Αν με  $\Delta$  παραστήσουμε μια δόση αμπικιλίνης (η αμπικιλίνη είναι μια χημική ουσία χρησιμοποιείται για τη θεραπεία αναπνευστικών λοιμώξεων) σε χιλιοστόγραμμα και με  $W$  παραστήσουμε το βάρος παιδιού σε κιλά, τότε η εξίσωση  $\Delta = 50W$  δίνει έναν κανόνα για την εύρεση της μέγιστης ασφαλούς ημερήσιας δόσης του φαρμάκου της αμπικιλίνης για παιδιά που ζυγίζουν λιγότερο από 10 κιλά.

α) Η εξίσωση εκφράζει συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β) Ποιες είναι οι λογικές επιλογές για ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή;

γ) Να δημιουργήσετε έναν πίνακα τιμών και μια γραφική παράσταση.

### §6.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί τη γραφική παράσταση της ευθείας  $\psi = \alpha x + \beta$  στο Γυμνάσιο. Εδώ προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$  στη γραφική παράσταση της  $f(x) = \alpha x + \beta$ , ώστε να προκύψουν οι σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο (πότε είναι παράλληλες μεταξύ τους, πότε ταυτίζονται, πότε τέμνουν τον άξονα  $y'y$  στο ίδιο σημείο).

Επίσης προτείνεται, αφού οι μαθητές παρατηρήσουν (με χρήση της γραφικής παράστασης και του πίνακα τιμών συγκεκριμένων γραμμικών συναρτήσεων) πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, να καταλήξουν σε γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία της συνάρτησης και να τα εκφράσουν συμβολικά, καθώς και να διερευνήσουν το ρόλο της παραμέτρου  $\alpha$  σε σχέση με αυτά (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.27 του ΑΠΣ).

### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

βι) Αν  $x$  είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει

$$360 \text{ θερμίδες είναι: } f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$$

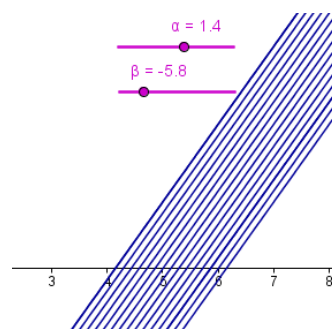
βii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος (βι), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Ο ρόλος των συντελεστών στην  $y=ax+\beta$ » από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, για την εισαγωγή στη συνάρτηση  $f(x)=ax+\beta$  μέσω της διερεύνησης του ρόλου κάθε συντελεστή στο σχηματισμό της ευθείας  $y=ax+\beta$  και ερμηνείας της σχέσης των μελών της κάθε μιας από τις δυο οικογένειες ευθειών, για  $a$  σταθερό και  $\beta$  μεταβαλλόμενο και αντίστροφα.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1774>



## **Κεφάλαιο 7<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν τη συνάρτηση  $\psi=ax^2$  και τις ιδιότητές της. Επίσης, με αφετηρία την  $\psi=ax^2$ , κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=ax^2 + bx + \gamma$  την οποία στη συνέχεια χρησιμοποιούν για να μελετήσουν ιδιότητες της  $f$ . Ειδικότερα:

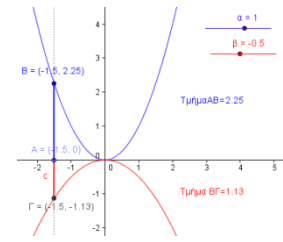
### **§7.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες**

Οι μαθητές χρησιμοποιούν πίνακες τιμών και λογισμικό για να κάνουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\psi=ax^2$ . Μέσα από την παρατήρηση της γραφικής παράστασης και των τιμών διερευνούν τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες των συναρτήσεων  $g(x)=x^2$  και  $h(x)=-x^2$ . Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης γενικεύουν τα παραπάνω συμπεράσματα για τη συνάρτηση  $f(x)=ax^2$  (προτείνεται η δραστηριότητα Δ. 29 του ΑΠΣ ή η χρήση λογισμικού) και τα εκφράζουν συμβολικά.

### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Το μικροπείραμα « Οι μεταβολές της συνάρτησης  $\psi=ax^2$  » από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά για τη μελέτη μονοτονίας της συνάρτησης  $\psi=ax^2$  όταν  $\alpha>0$  ή  $\alpha<0$ .

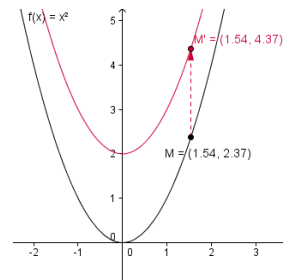
<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1729>



### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Μετατοπίσεις της  $\psi=ax^2$ » από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά από τους μαθητές για την οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση της  $\psi=ax^2$  αλλά και την εύρεση του τύπου της στη νέα θέση και να πειραματιστούν για τον συνδυασμό των δύο παραπάνω μετατοπίσεων.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1748>



## §7.3 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Να δοθεί έμφαση στη χάραξη και διερεύνηση της γραφικής παράστασης συγκεκριμένων πολυωνυμικών συναρτήσεων της μορφής  $f(x)=ax^2+bx+c$  και στη διαισθητική μελέτη της μονοτονίας, των ακρότατων και της συμμετρίας της συνάρτησης με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης. Η γενίκευση των παραπάνω εννοιών θα διδαχτούν στην Β Λυκείου.

Ειδικότερα, όσον αφορά στη χάραξη της γραφικής παράστασης και στη μελέτη της συνάρτησης  $f(x)=ax^2+bx+c$ , η ιδέα που βρίσκεται και πίσω από τη δραστηριότητα Δ.30 του ΑΠΣ είναι η εξής: Οι μαθητές χρησιμοποιούν είτε πίνακες τιμών είτε λογισμικό για να χαράξουν τη γραφική παράσταση της  $\psi=ax^2+k$  και να την συγκρίνουν με την  $\psi=ax^2$ , ομοίως για την  $\psi=a(x+l)^2$  και τελικά για την  $\psi=a(x+l)^2+k$ . Με αυτόν τον τρόπο εισάγονται διαισθητικά στις μετατοπίσεις, τις οποίες θα γενικεύσουν στην Β Λυκείου. Αν χρησιμοποιηθεί λογισμικό, οι μαθητές μπορούν αφού χαράξουν τη γραφική παράσταση της  $g(x)=ax^2$  για διάφορες τιμές του  $a$  να την μετατοπίσουν  $k$  μονάδες οριζόντια για διάφορες τιμές του  $k$  (π.χ. κατά 3 μονάδες αριστερά, κατά 4 μονάδες δεξιά) και να παρατηρήσουν τη μορφή που παίρνει ο τύπος της συνάρτησης. Στη συνέχεια να μετατοπίσουν  $l$  μονάδες κατακόρυφα για διάφορες τιμές του  $l$  (π.χ. κατά 2 μονάδες κάτω, κατά 5 μονάδες πάνω) και να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις. Συνδυάζοντας τις δύο μετατοπίσεις μπορούν να παρατηρήσουν ότι η συνάρτηση που θα προκύψει θα είναι της μορφής  $f(x)=a(x+k)^2+l$ .

Τέλος, δίνονται στους μαθητές συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής  $f(x)=ax^2+bx+c$  και εκείνοι προσπαθούν, με κατάλληλες μετατοπίσεις της  $g(x)=ax^2$ , να οδηγηθούν στη γραφική παράσταση της  $f$ . Στη συνέχεια μελετούν, με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης, ιδιότητες της  $f$  και επεκτείνουν τα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία, στα ακρότατα και στις συμμετρίες της  $g(x) = ax^2$  στην  $f(x)=ax^2+bx+c$ .

Επίσης, να γίνει γεωμετρική ερμηνεία των συμπερασμάτων των §3.3 και §4.2(ρίζες και πρόσημο τριωνύμου) με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)=ax^2+bx+c$  (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.32 του ΑΠΣ). Διδακτικά έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να σχεδιαστούν οι έξι βασικές περιπτώσεις που αφορούν στις τιμές της διακρίνουσας ( $\Delta>0$ ,  $\Delta=0$  και  $\Delta<0$ ) συνδυαζόμενες με το

πρόσημο του  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ,  $\alpha < 0$ ) ώστε οι μαθητές να συνδέσουν τη γραφική παράσταση με τα αλγεβρικά συμπεράσματα που ήδη χρησιμοποιούν

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων:  $\varphi(x)=x^2$ ,  $f(x)=(x-3)^2$ ,  $g(x)=(x+3)^2$ .

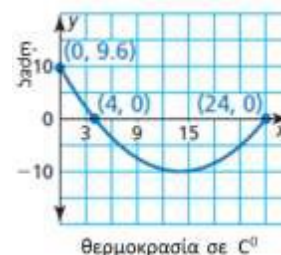
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\varphi(x)=x^2$					0				
$f(x)=(x-3)^2$								0	
$g(x)=(x+3)^2$		0							

β) Με βάση τον παραπάνω πίνακα τιμών, να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $\varphi$ ,  $f$  και  $g$ .

γ) Ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $\varphi$ , δίνει τη γραφική παράσταση της  $f$  και ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $\varphi$  δίνει τη γραφική παράσταση της  $g$ .

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Ένας μετεωρολόγος δημιούργησε την διπλανή παραβολή για να παρουσιάσει τη θερμοκρασία μιας πόλης μια συγκεκριμένη ημέρα του έτους, όπου το  $x$  είναι ο αριθμός ωρών μετά τα μεσάνυχτα και το  $y$  είναι η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου).



α) Βρείτε τη συνάρτηση  $f$  που αντιστοιχεί στην παραπάνω γραφική παράσταση.

β) Ποια είναι η πιο κρύα θερμοκρασία την ημέρα εκείνη;

**Σημείωση:** Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση <https://www.geogebra.org/download> ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση <http://photodentro.edu.gr/edusoft/>.

Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση <https://get.adobe.com/flashplayer/>.
- Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση <http://java.com/en/>. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις <http://photodentro.edu.gr> και <http://digitalschool.minedu.gov.gr> στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξανανοίξτε τον).